

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0146-05

全长黏结锚杆的数值流形方法模型

朱爱军¹, 邓安福², 曾祥勇²

(1. 贵州大学 土木建筑工程学院 贵阳 550003; 2. 重庆大学 土木工程学院 重庆 400045)

摘 要: 基于流形方法的有限覆盖技术, 确定流形元覆盖系统下锚杆的位移函数, 由此建立全长粘结锚杆的数值流形方法模型, 定义了锚杆流形单元, 并推导了锚杆流形单元的数值计算格式。该模型符合全粘结的物理意义, 是一种局部解析的锚杆数值方法, 具有较高的精度。同时锚杆与数学覆盖相对独立, 只要求锚杆完全处于数学网格的覆盖之中, 对其相对位置没有要求, 所以一般网格可以适应锚杆的复杂布置。该模型可以应用于岩土锚杆模拟及钢筋与混凝土共同作用分析等问题。

关 键 词: 全长黏结锚杆; 数值流形方法; 锚杆流形单元; 局部解析; 数学覆盖

中图分类号: O 241; TU452

文献标识码: A

Model of numerical manifold method for fully-grouted bolt

ZHU Ai-jun¹, DENG An-fu², ZHENG Xiang-yong²

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guizhou University, Guiyang 550003, China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: Based on the finite cover techniques of manifold method, the displacement function of bolt was determined according to the cover system of manifold element; and the numerical manifold model of fully-grouted bolt was established; and the concept of bolt manifold element as well as its numerical calculation form were obtained. This model meets the physical meaning of fully-grouted condition; it is a numerical method of bolt with feature of partial analysis and better calculation accuracy. At the same time, bolt and mathematics cover are relatively independent, only the bolt is required to be in mathematics grid, while no have strict requirement of their relative location has to be met, so general grid can meet complex configuration of bolt. This model can be used in simulating geotechnical bolt and analyzing the interaction of reinforcing bar and concrete.

Key words: fully- grouted bolt; numerical manifold method; bolt manifold element; partial analysis; mathematics cover

1 引 言

全长黏结锚杆在岩土工程中的应用非常普遍, 如水利水电工程的边坡锚固及地下隧洞锚固等。全长粘结锚杆的模拟分析是岩土力学数值方法要解决的重要问题之一。传统数值方法如有限元对全长粘结锚杆的计算^[1], 一般将锚杆离散为杆单元, 采用单元节点位移的插值函数来描述杆件的变形。锚杆通过单元节点与岩体材料共同作用形成总的平衡方程对锚固体体系进行求解。有限元的锚杆模型中, 计算求解的精度一般通过加密单元提高, 同时, 由于有限元网格的划分必须考虑块体单元与锚杆单元相协调, 要求锚杆单元节点与块体单元节点重合, 当

锚杆布置复杂时, 有限元网格的划分也相应复杂。

数值流形方法是石根华提出的一种新数值方法^[2-3], 流形方法具有局部解析的特点, 是经典方法和数值方法的结合。数值流形方法从其提出到现在得到了广泛的关注^[4-8], 并在岩土力学问题中得到应用^[9-11]。对于锚杆的计算分析, 目前数值流形方法仅发展了对端部锚杆的模拟方法^[12-13], 对全长粘结锚杆则缺乏相关的工作。

本文基于流形方法的有限覆盖技术, 提出全长粘结锚杆的数值流形方法模型, 推导了相关的数值计算格式。该模型符合全粘结的物理意义, 具有局部解析的特点。且锚杆与数学覆盖相对独立, 任意网格可以适应锚杆的复杂布置。该模型可以应用于

岩土锚杆模拟及钢筋与混凝土共同作用分析等。

2 数值流形方法的基本原理

2.1 流形单元的位移函数

数值流形方法的物理覆盖由数学覆盖和物理网格构成,物理覆盖的交集(重叠的公共部分)为流形单元。在物理覆盖上构造覆盖函数,在流形单元上加权平均得到求解域上的整体函数。目前物理覆盖上的覆盖函数通常采用 (x, y) 的0~2阶完全多项式。如果流形单元 e 由 q 个物理覆盖 $U_{e1}, U_{e2}, \dots, U_{eq}$ 的交集形成, U_{ei} 的覆盖函数为

$$\begin{Bmatrix} u_{ei} \\ v_{ei} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} f_{ej}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ej}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ei,2j-1} \\ d_{ei,2j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中;下标 e 表示流形单元, $f_{ej}(x, y)$ 为完全多项式的基本级数; $d_{ei,2j-1}$ 及 $d_{ei,2j}$ 为物理覆盖的覆盖自由度,对应了完全多项式的各系数。物理覆盖的覆盖函数可取0阶到高阶的完全多项式,对应0~2阶情况, m 分别为1, 3, 6。则流形单元的位移函数为

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q w_{ei} \begin{Bmatrix} u_{ei} \\ v_{ei} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} w_{ei}(x, y) f_{ej}(x, y) & 0 \\ 0 & w_{ei}(x, y) f_{ej}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ei,2j-1} \\ d_{ei,2j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 $w_{ei}(x, y)$ 为物理覆盖 U_{ei} 的权函数。

令物理覆盖 U_{ei} 的变形矩阵为

$$[T_{ei}] = [T_{ei1} \quad T_{ei2} \quad \dots \quad T_{eim}]$$

式中:

$$[T_{ej}] = \begin{bmatrix} t_{e1,2j-1} & t_{e1,2j} \\ t_{e2,2j-1} & t_{e2,2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{ei}(x, y) f_{ej}(x, y) & 0 \\ 0 & w_{ei}(x, y) f_{ej}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3)$$

令

$$\{D_{ei}\} = [d_{ei,1} \quad d_{ei,2} \quad \dots \quad d_{ei,2m-1} \quad d_{ei,2m}]^T \quad (4)$$

由此,式(2)可表达为

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q [T_{ei}] \{D_{ei}\} \quad i=1, 2, \dots, q \quad (5)$$

2.2 流形单元的控制方程

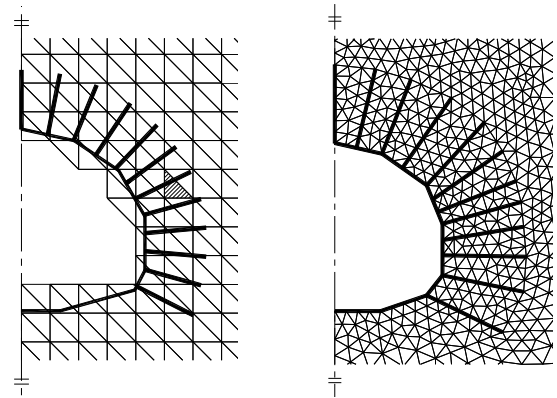
流形方法中,以每个流形单元为单位形成刚度矩阵、荷载矩阵、惯性矩阵等,最后集成总刚与总的荷载列阵得到平衡方程进行求解。

3 全长黏结锚的数值流形方法模型

3.1 锚杆布置与数学网格

基于覆盖的思想,只要求锚杆完全处于数学网格的覆盖之中,而对两者的相对关系没有要求,这与有限元法有很大区别。

图1为隧道开挖问题的简单示例。由图1(a)可见数值流形方法中,锚杆位置与数学网格无关,这使流形元覆盖系统的构造非常方便,规则的网格可以适应复杂的锚杆布置。图1(b)中,有限元网格划分则需要与锚杆位置相协调,单元划分相对复杂。



(a) 流形方法

(b) 有限元法

图1 隧道开挖锚固支护的流形元覆盖与有限元网格

Fig.1 NMM cover and FEM grid of tunnel

3.2 锚杆流形单元的方向位移函数及轴向应变

将完全处于流形单元 e 中的锚杆段称为锚杆流形单元 l ,如图1(a)中的阴影部分,同时,用 l 表示锚杆的方向。由于锚杆全长黏结,所以锚杆任一点的位移与单元位移协调,如图2(以三角形的数学网格为例)所示。将点 (x, y) 的位移在锚杆方向上进行分解,如图3所示。

令锚杆在 l 方向上的位移为 u_l ,则

$$u_l = u_e(x, y) \cos \alpha + v_e(x, y) \sin \alpha \quad (6)$$

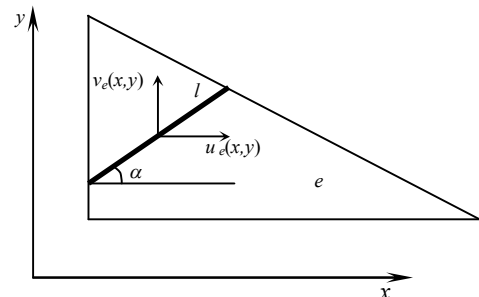


图2 单元 e 中的锚杆 l

Fig.2 Bolt l in element e

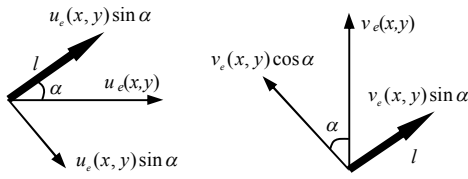


图3 (x, y)点位移在锚杆 l 方向上的分解

Fig.3 Decomposition of (x, y) displacement on l

将 u_l 对锚杆的方向 l 求导则可得到锚杆的轴向应变为:

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u_e(x, y)}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial y} \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial u_e(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial x} \right) \quad (7)$$

将式(7)用矩阵表达为:

$$\varepsilon_l = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_e(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_e(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

对物理覆盖 U_{ei} , 令

$$[B_{ei}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{e1,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{e1,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{e1,2m}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{e2,1}}{\partial y} & \frac{\partial t_{e2,2}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial t_{e2,2m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{e1,1}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{e1,2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{e1,2m}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,2m}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

则根据式(3)、式(5), 有

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_e(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_e(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_e(x, y)}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B_{e1} \ B_{e2} \ \dots \ B_{eq}] \begin{Bmatrix} D_{e1} \\ D_{e2} \\ \vdots \\ D_{eq} \end{Bmatrix} = [B_e] \{D_e\} \quad (10)$$

则式(8)可表达为

$$\varepsilon_l = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} [B_e] \{D_e\} \quad (11)$$

3.3 锚杆流形单元的刚度矩阵

锚杆为线性构件, 锚杆流形单元为一维单元, 锚杆的本构关系仅为轴向力-轴向应变关系。如锚杆的弹性模量为 E , 截面面积为 A , 则锚杆的线性刚度为:

$$k = EA \quad (12)$$

锚杆的轴力:

$$p = k \varepsilon_l \quad (13)$$

则锚杆的弹性势能为

$$\Pi_e = \int_l \frac{1}{2} p \varepsilon_l dl = \int_l \frac{1}{2} k \varepsilon_l^2 dl = \frac{1}{2} k \int_l [D_e]^T [B_e]^T = [D_e]^T [B_e]^T \begin{bmatrix} \cos^4 \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin^4 \alpha & \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos^3 \alpha & \sin^3 \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{bmatrix} [B_e] [D_e] \quad (14)$$

令

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos^4 \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin^4 \alpha & \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos^3 \alpha & \sin^3 \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (15)$$

则式(14)可表达为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} k \int_l \{D_e\}^T [B_e]^T [\alpha] [B_e] \{D_e\} dl = \frac{1}{2} \{D_e\}^T \left(k \int_l [B_e]^T [\alpha] [B_e] dl \right) \{D_e\} \quad (16)$$

式(16)的积分在锚杆 l 上进行。数学覆盖采用三角形网格时, 流形单元 e 由三个物理覆盖组成, 在此将 3 个物理覆盖编号为 1~3。由最小势能原理可得到锚杆流形单元 l 的刚度矩阵:

$$[K_l] = k \int_l [B_e]^T [\alpha] [B_e] dl = \begin{bmatrix} K_{l11} & K_{l12} & K_{l13} \\ K_{l21} & K_{l22} & K_{l23} \\ K_{l31} & K_{l32} & K_{l33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:

$$[K_{lrs}] = k \int_l [B_{er}]^T [\alpha] [B_{es}] dl; \quad r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3 \quad (18)$$

如果在组成流形单元的各物理覆盖上使用相同阶次的覆盖函数, 则式(18)中, 各子矩阵的阶数为 $2m \times 2m$ 阶。

3.4 锚杆的初始轴力矩阵

对主动全长黏结锚杆或预应力钢筋混凝土问题, 需要考虑锚杆或钢筋的初始轴力的作用。如锚杆初始轴向力为 p_0 , 则其势能为

$$\Pi_p = \int_l p_0 \varepsilon_l dl = p_0 \int_l [D_e]^T [B_e]^T \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} dl =$$

$$[D_e]^T \left(p_0 \int_l [B_e]^T \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} dl \right) \quad (19)$$

如采用三角形网格作为数学覆盖, 则由最小势能原理可得到锚杆流形单元 l 的初始轴力矩阵:

$$\{F_l\} = p_0 \int_l [B_e]^T \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} dl = \begin{Bmatrix} F_{l1} \\ F_{l2} \\ F_{l3} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中

$$\{F_{lr}\} = p_0 \int_l [B_{er}]^T \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} dl, \quad r=1, 2, 3 \quad (21)$$

对应于物理覆盖上各阶次的覆盖函数, 式(21)为 $2m$ 阶的向量。如果流形单元 e 上采用一阶的权函数, 则当物理覆盖上的覆盖函数阶次为 $0 \sim 2$ 阶时, 式(18)及式(21)需要用到 x 、 y 的 $0 \sim 4$ 阶的线积分公式。从以上可见, 对应于 $0 \sim 2$ 阶的覆盖函数, 锚杆流形单元具有 1, 2, 3 阶的轴向位移解, $0 \sim 2$ 阶的轴力解。

4 算 例

图 4 为一隧道的开挖问题, 图中尺寸单位为 m。岩体力学参数为: 重度 $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$, 变形模量 $E = 1.0 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。根据对称性取隧洞的一半建立计算模型, 模型的下边界受 y 方向固定约束, 左右边界受 x 方向固定约束。按平面应变进行分析。隧洞采用全断面开挖, 并进行全粘结锚杆支护, 锚杆的布置如图中所示, 锚杆的线性刚度为 300 MN , 采用规则的数学覆盖网格。采用 1 阶的覆盖函数。

图 5 为计算得到的锚杆轴力分布图, 在图中, 锚杆逆时针方向的轴力为拉, 顺时针方向的轴力为压。可以看到, 在拱顶, 锚杆全长受拉, 轴力分布较均匀, 轴力数值也较大。在拱侧及拱脚处, 锚杆拉力由外向内减小得很快, 甚至在拱侧的锚杆末端有压力产生。图 5 显示的结果为流形方法计算得到的直接结果, 其轴力没有经过磨平处理。可以看到, 锚杆轴力有较好的计算效果, 各单元中的轴力呈线性分布。相对于有限元法, 流形方法得到的锚杆单元之间轴力的连续性更好。

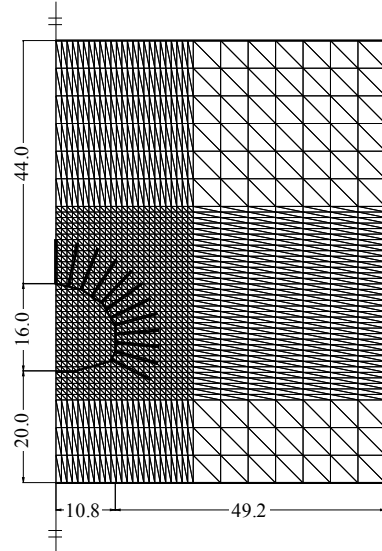


图 4 隧洞锚固支护的流形元计算模型 (单位: m)
Fig.4 NMM calculation model of tunnel bolting(unit: m)

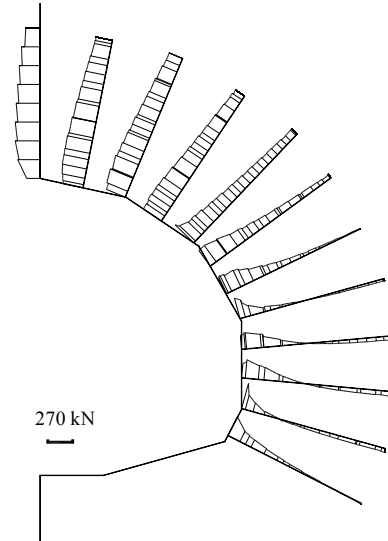


图 5 锚杆的轴力分布图
Fig.5 The axis force distribution of bolt

5 结 论

(1) 全长黏结锚杆的数值流形方法模型是基于有限覆盖技术建立的, 它与传统的锚杆数值计算模型有很大区别: 传统的锚杆模型包括数值流形方法以前发展的端部锚固式锚杆模型都采用的是节点位移模式, 而全长黏结锚杆的数值流形方法模型则采用的是局部解析的位移模式, 是解析方法与数值方法相结合的锚杆模型。

(2) 锚杆流形单元的计算精度可以通过物理覆盖上覆盖函数的阶次得以灵活地控制, 当采用高阶的覆盖函数时, 锚杆内力的解答也具有局部解析的特点, 有较高的计算精度。

(3) 全长黏结锚杆的数值流形方法模型中, 锚杆与数学网格相对独立, 规则的数学网格可以适应

任意的锚杆布置, 消除了锚杆数值模拟中锚杆布置与单元划分相互制约的矛盾。

参 考 文 献

- [1] 孙钧, 汪炳槛. 地下结构有限元法解析[M]. 上海: 同济大学出版社, 1988.
- [2] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [3] Shi G. H. Modeling Rock Joints and Blocks by Manifold Method[A]. **Proceedings of 32nd U.S. Symposium on Rock Mechanics**[C]. New Mexico: Santa Fe 1992, 639—648.
- [4] Guangqi Chen, Yuzo Ohnishi, Takahiro Ito. Development of high order manifold method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, 43(4): 685—712.
- [5] MING Lu. High-order manifold method with simplex integration[A]. **Fifth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation**[C]. Beer Sheva, Israel: [s. l.]: [s. n.], 2002, 75—83.
- [6] 邓安福, 朱爱军, 曾祥勇. 高低阶覆盖函数混合的数值流形方法[J]. 土木工程学报, 2006, 39(01): 75—78.
DENG An-fu, ZHU Ai-jun, Zheng Xiang-yong. The numerical manifold method using low-order and high-order cover function[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2006, 39(01): 75—78.
- [7] 朱爱军, 邓安福, 曾祥勇. 数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(02): 179—183.
ZHU Ai-jun, DENG An-fu, YAN Chang-wu, Deng wei-dong. Effects of physical grid in rock mass for generation of cover system for numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(12): 1 933—1 936.
- [8] 张国新, 周立本, 朱伯芳等. 五强溪船闸裂缝的流形元模拟[J]. 水利学报, 2003, (11): 37—42.
ZHANG Guo-xin, ZHOU Li-ben, ZHU Bo-fang, Xu Run-min. Simulation of cracking with manifold method for Wu qiang xi shiploc[J]. **Shui Li Xue Bao**, 2003, (11): 37—42.
- [9] 张国新, 王光纶, 裴觉民. 基于流形方法的结构体破坏分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(3): 281—287.
ZHANG Guo-xin, WANG Guang-lun, Pei Jue-min. Structure Failure Analysis Based on Manifold Method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2001, 20(3): 281—287.
- [10] 何传永, 武雄, 吴永平. 平班水电站右岸滑坡流形元法数值模拟[J]. 中国水利水电科学研究院学报, 2004, 2(2): 120—123.
HE Chuan-Yong, WU Xiong, WU Yong-Ping. Numerical simulation of landslide on the right bank at the pingban station by using manifold method[J]. **Journal of China Institute of Water Resources and Hydropower Research**, 2004, 2(2): 120—123.
- [11] 曹文贵, 速宝玉. 岩体锚固支护的数值流形方法模拟及其应用[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 581—583.
CAO Wen-gui, SU Bao-yu. Simulation of numerical manifold method for supports by reinforced bolt and its application[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(5): 581—583.
- [12] 王书法, 朱维申, 李术才, 等. 加锚岩体变形分析的数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(8): 1 120—1 123.
WANG Shu-fa, ZHU Weishen, Li Shucai, Chen Shenghong. Numerical manifold method of deformation analysis for bolt-supported rock mass [J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(8): 1 120—1 123.
- [13] 姜清辉, 王书法. 锚固岩体的三维数值流形方法模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(3): 528—532.
JIANG Qing-hui, WANG Shu-fa. Three-Dimensional Numerical Manifold Method Simulation of Anchor Bolt-Supported Rockmass[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(3): 528—532.